Ułamki proste

1 Specyfikacja funkcjonalna bezpieczeństwa konstrukcji składającej się z sieci kabli jest określona wzorem

$$S(x) = \frac{23x - 11x^2}{(1-2x)(9-x^2)},$$

gdzie $x > 0$ jest parametrem naprężenia drutu używanego do budowy kabla, a $S(x)$ jest sparametryzowanym współczynnikiem bezpieczeństwa konstrukcji. Poprzez rozkład na ułamki proste wykaż, że jeśli $0 < x < 0{,}5$, to

$$S(x) = \frac{23x}{9} + \frac{105x^2}{27} + \frac{653x^3}{81} + \ldots.$$

[*Wskazówka:*

$(1-a)^{-1} = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots$ i $(1+a)^{-1} = 1 - a + a^2 - a^3 + \ldots,$

dla wszystkich a spełniających warunek $-1 < a < 1$.]

Rozwiązanie

2 Transmitancja operatorowa niezmienniczego w czasie układu liniowego jest określona wzorem

$$H(s) = \frac{1 - s^{-1}}{1 - 8s^{-3}}.$$

Wykaż, że:

$$H(s) = 1 + \frac{1}{3(s-2)} - \frac{10}{3\left([s+1]^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2\right)} - \frac{4s}{3\left([s+1]^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2\right)}.$$

Rozwiązanie

Rozwiązania

1 Stosując wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów $9 - x^2 = (3 + x)(3 - x)$, otrzymujemy:

$$\frac{23x - 11x^2}{(1 - 2x)(9 - x^2)} = \frac{A}{1 - 2x} + \frac{B}{3 + x} + \frac{C}{3 - x}$$
$$= \frac{A(3 + x)(3 - x) + B(1 - 2x)(3 - x) + C(1 - 2x)(3 + x)}{(1 - 2x)(3 + x)(3 - x)}$$

Następnie porównując liczniki, otrzymujemy:

$$23x - 11x^2 \equiv A(3 + x)(3 - x) + B(1 - 2x)(3 - x) + C(1 - 2x)(3 + x)$$

Niech $x = 3$, więc $69 - 99 = C(-5)(6)$, zatem $C = 1$.

Niech $x = -3$, więc $-69 - 99 = B(7)(6)$, zatem $B = -4$.

Niech $x = 1/2$, więc $23/2 - 11/4 = A(7/2)(5/2)$, zatem A = 1. Stąd:

$$\frac{23 - 11x^2}{(1 - 2x)(9 - x^2)} = \frac{1}{1 - 2x} - \frac{4}{3 + x} + \frac{1}{3 - x}$$

Po rozwinięciu każdego z wyrażeń po prawej stronie równania (korzystamy ze wskazówki podanej w temacie zadania) widzimy, że:

$$\frac{1}{(1 - 2x)} = \left(1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \ldots\right)$$

$$-\frac{4}{(3 + x)} = -\frac{4}{3(1 + x/3)} = -\frac{4}{3}\left(1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} - \frac{x^3}{27} + \ldots\right)$$

$$\frac{1}{(3 - x)} = \frac{1}{3(1 - x/3)} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} + \frac{x^3}{27} + \ldots\right)$$

Zatem:

$$\frac{1}{(1 - 2x)} - \frac{4}{(3 + x)} + \frac{1}{(3 - x)}$$
$$= \left(1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \ldots\right) - \frac{4}{3}\left(1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} - \frac{x^3}{27} + \ldots\right) + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} + \frac{x^3}{27} + \ldots\right)$$
$$= 1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{3} + x\left(2 + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}\right) + x^2\left(4 - \frac{4}{27} + \frac{1}{27}\right) + x^3\left(8 + \frac{4}{81} + \frac{1}{81}\right) + \ldots$$
$$= \frac{23x}{9} + \frac{105x^2}{27} + \frac{653x^3}{81} + \ldots$$

Uwzględniając założenie podane we wskazówce oraz fakt, że $x > 0$, stwierdzamy, że powyższy wzór zachodzi dla wszystkich x spełniających warunek $0 < x < 1/2$.

Pytanie

2

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1-s^{-1}}{1-8s^{-3}} \\ &= \frac{s^3-s^2}{s^3-8} \\ &= 1+\frac{8-s^2}{s^3-8} \end{aligned}$$

Teraz:

$$\begin{aligned} \frac{8-s^2}{s^3-8} &= \frac{8-s^2}{(s-2)(s^2+2s+4)} \\ &= \frac{A}{s-2}+\frac{Bs+C}{s^2+2s+4} \qquad \text{Rozkładając na ułamki proste.} \\ &= \frac{A(s^2+2s+4)+(Bs+C)(s-2)}{(s-2)(s^2+2s+4)} \end{aligned}$$

Porównując liczniki, otrzymujemy:

$$8-s^2 \equiv A(s^2+2s+4)+(Bs+C)(s-2)$$

Niech $s=2$, więc $8-4=A(4+4+4)$, zatem $A=1/3$.

Niech $s=0$, więc $8=4A-2C$, zatem $C=2A-4=-10/3$.

Niech $s=1$, więc $8-1=7A-(B+C)$, zatem $B=7A-C-7=-4/3$.

Konsekwentnie:

$$\begin{aligned} H(s) &= 1+\frac{1}{3(s-2)}-\frac{4s+10}{3(s^2+2s+4)} \\ &= 1+\frac{1}{3(s-2)}-\frac{10}{3(s^2+2s+4)}-\frac{4s}{3(s^2+2s+4)} \\ &= 1+\frac{1}{3(s-2)}-\frac{10}{3\left([s+1]^2+\left(\sqrt{3}\right)^2\right)}-\frac{4s}{3\left([s+1]^2+\left(\sqrt{3}\right)^2\right)}, \end{aligned}$$

ponieważ przez uzupełnienie do kwadratu otrzymamy

$$s^2+2s+4=s^2+2s+1+3=[s+1]^2+\left(\sqrt{3}\right)^2.$$

Pytanie